E.N.S.I. 1985 Option TA

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Les différentes parties de ce problème sont, dans une très large mesure, indépendantes.

Il est possible par exemple d'aborder la partie 2 en admettant certains résultats fournis dans la partie 1.

Les parties 3, 4, 5 sont totalement indépendantes des deux premières et mis à part les notations et des résultats fournis dans l'énoncé elles sont elles-mêmes indépendantes entre elles.

Soit E l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur R et telles que les intégrales :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f^2(x)\, dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (f'(x))^2\, dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (f''(x))^2\, dx$$

soient convergentes.

PARTIE 1

1° Montrer que si les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\, dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x)\, dx$ sont convergentes alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(x)\, dx$ est convergente et vérifie la relation

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(x)\, dx \right)^2 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\, dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x)\, dx.$$

On pourra considérer :

$$\int_X^Y (\lambda f(x) + g(x))^2\, dx$$

2° Montrer que E est un espace R vectoriel.

3° Montrer que pour une fonction f de E l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\, dx$ converge.

4° *a.* En considérant $\int_{-\infty}^{+\infty} 2 \cdot f(x) \cdot f'(x)\, dx$, montrer que f admet des limites en plus et moins l'infini; montrer ensuite que ces limites sont nulles.

b. Montrer de même que f' admet une limite nulle en plus et en moins l'infini.

5° Soit λ donné, strictement positif, et E_λ l'ensemble des fonctions qui s'écrivent comme le produit d'une fonction polynomiale par la fonction

$$\exp\left(-\frac{\lambda}{2} x^2\right).$$

Montrer que E_λ est un sous-espace vectoriel de E.

PARTIE 2

On rappelle qu'un vecteur propre x pour un endomorphisme F, associé à la valeur propre λ, est un vecteur non *nul* tel que $F(x) = \lambda \cdot x$.

Soit C (R) l'ensemble des fonctions numériques réelles définies sur R et indéfiniment dérivables.

Soit L, A, B les applications de C (R) dans C (R), qui, à la fonction f, font correspondre L (f), A (f), B (f) définies par :

$$L(f)(x) = -\frac{d^2 f}{dx^2}(x) + x^2 \cdot f(x)$$

$$A(f)(x) = -\frac{df}{dx}(x) + x.f(x) \qquad B(f)(x) = \frac{df}{dx}(x) + x.f(x)$$

soit donc si Id désigne l'application identique de C (R) et D l'opérateur de dérivation ($D(f) = f'$)

$$L = -D^2 + x^2 . Id. \qquad A = -D + x . Id, \qquad B = D + x . Id$$

1° Montrer que L, A, B sont des endomorphismes de C (R).

2° Soit f dans C (R), en calculant $A \circ B(f)$, établir les relations

$$A \circ B = L - Id, \quad B \circ A = L + Id, \quad B \circ A - A \circ B = 2 . Id$$

3° Montrer que L définit un endomorphisme de E1 (voir la définition au 5° de la partie 1). On notera F la restriction de L à E1. (On remarquera qu'il en est de même pour A et B.)

4° On se propose d'étudier les éléments propres de F.

a. Résoudre dans C (R) l'équation différentielle $A(f) = 0$.

Soit f dans E1 un vecteur propre de F associé à la valeur propre s.

b. Montrer que $A(f)$ est un vecteur propre de F et donner la valeur propre associée (on pourra utiliser les relations du 2° de la partie 2).

5° Soit maintenant f dans E1 un vecteur propre de F associé à une valeur propre s *différente de* 1.

a. Montrer que $B(f)$ est vecteur propre de F et indiquer la valeur propre correspondante.

b. Montrer que 1 est une valeur propre de F et donner un vecteur propre associé, ce qui indiquera la raison de la restriction du 5° *a*.

6° Montrer en considérant pour un vecteur propre de F $\int_{-\infty}^{+\infty} F(f)(x) . f(x)\, dx$ que les valeurs propres de F sont strictement positives.

7° *a.* Montrer que 1 est la seule valeur propre de F dans l'intervalle fermé [0,2] en utilisant le 5°.

b. En déduire toutes les valeurs propres de F; peut-on donner pour chaque valeur propre de F un vecteur propre associé en fonction de A et des puissances de A ?

8° Si f et g sont des éléments de E1 vérifier par des intégrations par parties que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(f)(x) . g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) . F(g)(x)\, dx.$$

PARTIE 3

On conviendra désormais d'identifier un polynôme avec la fonction polynomiale qui lui est associée.

Soit $y = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ l'élément de E1.

On pose $V_n = A^n(y)$.

1° Soit $H_n = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) . V_n$, montrer que H_n est un polynôme.

2° Montrer que sur R [X] ensemble des fonctions polynomiales, l'application :

$$(P, Q) \longrightarrow B(P, Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) . P(x) . Q(x)\, dx$$

définit un produit scalaire.

3° *a.* Montrer que pour tout n entier naturel,

$H_n = (-1)^n . \exp(x^2) . D^n(\exp -x^2)$ (D désigne l'opérateur de dérivation).

b. Montrer que H_p est un polynôme de degré p et calculer le coefficient de son terme de degré p.

4° Montrer que pour tout polynôme P de R (X) de degré au plus n, pour tout k de [0, n]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} D^k (\exp - x^2) \cdot P(x)\, dx = (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} (\exp - x^2) \cdot P^{(k)}(x)\, dx$$

5° Déduire du 4° que pour tous les entiers naturels n et p distincts :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\, H_n(x) \cdot H_p(x)\, dx = B(H_n, H_p) = 0.$$

6° En déduire que les H_p pour p entier naturel compris entre 0 et n constituent une base orthogonale de $R_n[X]$, ensemble des fonctions polynomiales de degré au plus n.

PARTIE 4

On rappelle que d'après la partie 3, les H_i pour i compris entre 0 et n constituent une base orthogonale de $R_n[X]$ pour le produit scalaire du 2° de la partie 3.

1° Montrer que, quel que soit le polynôme Q de degré strictement inférieur à n,

$$B(Q, H_n) = 0.$$

2° *a.* Si $P = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot H_i(x)$ donner une expression des a_i.

b. Soit P un polynôme de degré n exactement et tel que pour tout polynôme Q de degré strictement plus petit que n,

$$B(P, Q) = 0.$$

Montrer que P est proportionnel à H_n ; soit $P = a \cdot H_n$.

3° En considérant $B(H_{k+1}, H_i) = 0$ pour $i \neq k+1$ et en effectuant une intégration par parties, montrer que $(H_i)'$ est proportionnel à H_{i-1} et donner le coefficient de proportionnalité.

4° On pose :

$$N(H_n) = B(H_n, H_n)^{1/2} \quad \text{et on donne} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Montrer que :

$$N(H_n) = \sqrt{2.n} \cdot N(H_{n-1}) \quad \text{et en déduire } N(H_n).$$

5° Déterminer $(H_0, H_1, H_2, H_3, H_4)$ et écrire la matrice représentant la restriction du produit scalaire $B(P, Q)$ à $R_4[X]$ dans la base $(H_0, H_1, H_2, H_3, H_4)$.

PARTIE 5

1° Justifier l'existence des coefficients $U_n(x)$ tels que :

$$\exp(2.t.x - t^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x) \cdot \frac{t^n}{n!} \text{ pour tout } t \text{ de R.}$$

2° Montrer que $U_n(x) = (-1)^n \cdot H_n(x)$ pour tout entier naturel n et donc que :

$$\exp(2.t.x - t^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot H_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$